LAHENDUSED 10.klass

1. *Vastus:* **Meistril kulub 10, õpilasel 15 tundi**.

Lahendus. Lõpetagu meister tellimuse üksinda töötades x tunniga ning õpilane y tunniga. Sellisel juhul täidab meister ühe tunniga $\frac{1}{x}$ osa, õpilane $\frac{1}{y}$ osa ning meister ja õpilane koostöös $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ osa tellimusest. Sellisel juhul kulub koostöös tellimuse täitmiseks $\frac{xy}{x+y}$ tundi.

Saame võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} x+5=y \\ x=\dfrac{xy}{x+y}+4 \end{cases},$$

millest

$$x=\frac{x(x+5)}{x+x+5}+4$$

$$x=\frac{x^2+5x}{2x+5}+4 \quad \Big| \cdot (2x+5)$$

$$2x^2+5x=x^2+5x+8x+20$$

$$x^2-8x-20=0$$

$$x_{1;2}=4\pm\sqrt{16+20}=4\pm 6 \Rightarrow x=10 \text{ (negatiivne lahend ei sobi)}$$

Seega $y=x+5=10+5=15$

Kontroll. Koostöös kulub meistril ja õpilasel tellimuse täitmiseks $\frac{10\cdot 15}{10+15}=\frac{150}{25}=6$ (tundi). Seega täidavad nad poole tellimusest 3 tunniga. Meistril kulub poole tellimuse täitmiseks tõesti 5 tundi. Lahend sobib.

2. *Vastus:* **Ainus lahend on *a* = 8, *b* = 3, M = 283833.**

Lahendus 1. Et $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, siis peab otsitud arv jaguma arvudega 3, 11 ja 61. Lähtume 3-ga jaguvuse tunnusest (*arvu numbrite summa peab jaguma 3-ga*). Vastavalt tunnusele saame

$$(2+a+b+a+b+b) \vdots 3$$
$$(3b+2a+2) \vdots 3$$

Et $3b$ jagub 3-ga teguri 3 tõttu, siis peab $(2a+2) \vdots 3$, millest numbri *a* võimalikud väärtused on 2, 5 ja 8.

Edasi vaatleme 3 varianti.

1) $a = 2$

Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele (*arvu paaritutel kohtadel asetsevate numbrite summa ja paariskohtadel asetsevate numbrite summa vahe peab jaguma 11-ga*) saame

$$[(2+b+b)-(a+a+b)] \vdots 11$$
$$(2+b-2a) \vdots 11$$
$$(2+b-2\cdot 2) \vdots 11$$
$$(b-2) \vdots 11,$$

millest $b = 2$.

Kontrollime jaguvust 61-ga: $222222 : 61 = 3642$, jääk 60. Arv 222222 ei vasta tingimustele.

2) $a = 5$

Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele saame

$$(2+b-2a) \vdots 11$$
$$(b-8) \vdots 11,$$

millest $b = 8$.

Kontrollime jaguvust 61-ga: $258588 : 61 = 4239$, jääk 9. Arv 258588 ei vasta tingimustele.

3) $a = 8$

Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele saame

$$(2+b-2a) \vdots 11$$
$$(b-14) \vdots 11,$$

millest $b = 3$.

Kontrollime jaguvust 61-ga: $283833 : 61 = 4653$. Leitud arv vastab tingimustele.

Lahendus 2. Et $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, siis peab otsitud arv jaguma arvudega 3, 11 ja 61. Lähtume 11-ga jaguvuse tunnusest (*arvu paaritutel kohtadel asetsevate numbrite summa ja paariskohtadel asetsevate numbrite summa vahe peab jaguma 11-ga*). Vastavalt tunnusele saame

$$[(2+b+b)-(a+a+b)] \vdots 11$$
$$(2+b-2a) \vdots 11$$

Edasi vaatleme 3 varianti.

1) $2+b-2a=11$, millest $b=2a+9$. Et a ja b on numbrid, siis ainsaks võimaluseks on $a=0$ ja $b=9$. Paraku on arvu 209099 ristsumma 29, seega $209099 \not\vdots 3$. Arv 209099 ei vasta tingimustele.

2) $2+b-2a=0$, millest $b=2a-2$.
Edasi kasutame asjaolu, et $M \vdots 3$ (*arvu ristsumma peab jaguma 3ga*).
Numbrite summa $2+a+b+a+b+b=2a+3b+2=\ldots$
Asendame eelnevalt leitud seosest $2a=b+2$.
$\ldots=2a+3b+2=b+2+3b+2=4b+4=4(b+1)$.
Selleks, et $[4(b+1)] \vdots 3$ on 3 võimalust.
2.1) $b=2 \Rightarrow a=2$
Kontrollime jaguvust 61-ga: $222222 : 61 = 3642$, jääk 60. Arv 222222 ei vasta tingimustele.
2.2) $b=5 \Rightarrow a=3{,}5$
Vastuolu, a peab olema number.
2.3) $b=8 \Rightarrow a=5$
Kontrollime jaguvust 61-ga: $258588 : 61 = 4239$, jääk 9. Arv 258588 ei vasta tingimustele.

3) $2+b-2a=-11$, millest $b=2a-13$. Saame 3 võimalust.
1.1) $a=7$ ja $b=1$
Et arvu 271711 ristsumma on 19, siis $271711 \not\vdots 3$. Leitud arv ei vasta tingimustele.
1.2) $a=8$ ja $b=3$
Arvu 283833 ristsumma on 27, niisiis $283833 \vdots 3$. Kontrollime jaguvust 61-ga. $283833 : 61 = 4653$. Leitud arv vastab tingimustele.
1.3) $a=9$ ja $b=5$
Et arvu 295955 ristsumma on 35, siis $295955 \not\vdots 3$. Leitud arv ei vasta tingimustele.

3. *Vastus:* **Ainus selline ruutvõrrand on $x^2+3x+2=0$.**

Lahendus. Vastavalt Viète'i teoreemile $x_1 \cdot x_2 = q$. Et x_1 ja x_2 on täisarvud ning q algarv, siis peab üks lahenditest olema kas 1 või -1. Olgu selleks lahendiks x_1. Käsitleme mõlemat võimalust eraldi.

1) $x_1 = 1$

Sellisel juhul $1 \cdot x_2 = q \Rightarrow x_2 = q$

Vastavalt Viète'i teoreemile $x_1 + x_2 = -p$, millest antud juhul $1+q=-p$. Saime seose $p+q=-1$. Et kahe algarvu summa ei saa olla negatiivne, siis sobivad lahendid puuduvad.

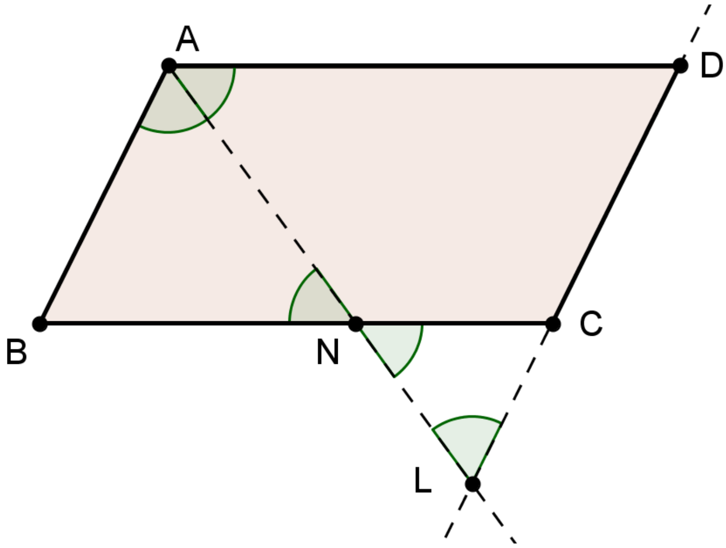
2) $x_1 = -1$

Sellisel juhul $-1 \cdot x_2 = q \Rightarrow x_2 = -q$.

Vastavalt Viète'i teoreemile $x_1 + x_2 = -p$, millest antud juhul $-1-q=-p$. Saime seose $p-q=1$. Ainsad algarvud vahega üks on 3 ja 2. Niisiis on ainsaks lahendiks $p=3$ ja $q=2$.

4. *Vastus:* **5 ja 7**.

Lahendus. Teeme abistava joonise.



1) Näitame, et ΔANB on võrdhaarne.

$\angle ANB = \angle NAD$, sest paralleelsete sirgete AD ja BC lõikamisel kolmanda sirgega AN tekib paar võrdseid põiknurki.

$\angle NAD = \angle NAB$, sest AN on nurgapoolitaja.

Seega on ΔANB võrdhaarne ning rööpküliku külje AB pikkus $|AB| = |BN| = 5$.

2) Näitame, et ΔCNL on võrdhaarne.

$\angle BAN = \angle NLC$, sest paralleelsete sirgete AB ja DL lõikamisel kolmanda sirgega AL tekib paar võrdseid põiknurki.

Eelmisest punktist $\angle BAN = \angle BNA$ ning $\angle BNA = \angle LNC$, sest tegemist on tippnurkadega.

Seega on ΔNLC võrdhaarne ning $|NC| = |LC| = 2$.

Rööpküliku külje BC pikkus $|BC| = |BN| + |NC| = 5 + 2 = 7$.

5. *Vastus:* **786.**

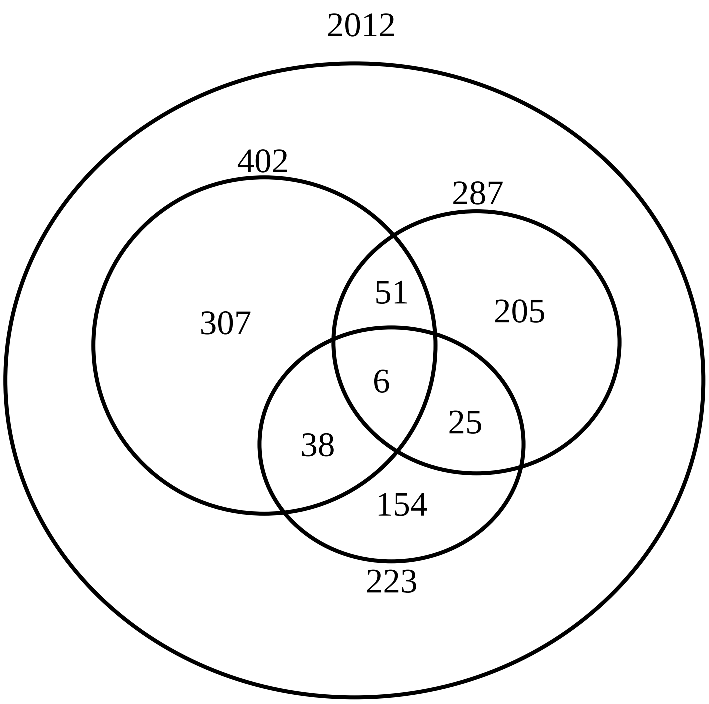
Lahendus.

1) Arvudega 5, 7 ja 9 korraga jaguvad arvud on 315, 630, 945…
Esimese 2012 naturaalarvu seas on neid täisarv arvust $2012:315$. Selliseid arve on 6.
2) Arvudega 5 ja 7 korraga jaguvaid arve on 57 (täisarv arvust $2012:35$).
3) Arvudega 5 ja 9 korraga jaguvaid arve on 44 (täisarv arvust $2012:45$).
4) Arvudega 7 ja 9 korraga jaguvaid arve on 31 (täisarv arvust $2012:63$).
5) Arvuga 5 jaguvaid arve on 402 (täisarv arvust $2012:5$).
6) Arvuga 7 jaguvaid arve on 287 (täisarv arvust $2012:7$).
7) Arvuga 9 jaguvaid arve on 223 (täisarv arvust $2012:9$).

Edasi võib arutleda erinevalt. Toome ära kaks võimalust.

1.võimalus (*Euleri ringid*).

Kuna leitud 6, 57, 44, 31, 402, 287 ja 223 sisaldavad paljusid arve mitmekordselt, siis kanname tulemused abistavale joonisele



Välistanud mitmekordse arvestamise, saame:
$6+51+38+25+307+205+154=786$

2.võimalus

Ainult 5ga ja ainult 7ga jaguvad arvud sisalduvad kahe peale kokku juba kaks korda need arvud, mis jaguvad korraga arvudega 5 ja 7. Niisiis tuleb 57 hoopis lahutada. Samuti tuleb lahutada ka 44 ja 31.
Kuna arvude, mis jaguvad 5, 7 ja 9 korraga, arvu me alguses liitsime kolm korda ja hiljem lahutasime kolm korda, siis pole neid kasutuses ning nende arv tuleb liita.
Niisiis $402+287+223-57-44-31+6=786$.

HINDAMINE

1. Mistahes õige võrrandite süsteemi (võrrandi) moodustamise eest 3p
   Võrrandite süsteemi (võrrandi) tehniliselt õige lahenduse eest 2p
   Lahendi kontrolli eest 1p
   Õige vastuse eest 1p
   7p
2. *Lahendus1*
   3-ga jaguvuse tunnuse teadmise eest 1p
   3-ga jaguvuse tunnuse abil 3 variandi eristamise eest 2p
   Variandi 1) õige lahenduse ees 1p
   Variandi 2) õige lahenduse ees 1p
   Variandi 3) õige lahenduse ees 1p
   Õige vastuse eest 1p
   Märkus Et ülesanne sisaldab palju arvutusi, siis ühe või ka kahe arvutusvea eest -1p. **7p**
   Lahendus2
   11-ga jaguvuse tunnuse teadmise eest 1p
   Variandi 1) õige lahenduse ees 1p
   Variandi 2) õige lahenduse ees 2p
   Variandi 3) õige lahenduse ees 2p
   Õige vastuse eest 1p
   Märkus Põhjenduseta õige vastuse eest anda 1p. Õpilane võib 11-ga jaguvuse kasutamisel lahutada vastupidises järjekorras. Sellisel juhul lähevad variandid 1) ja 3) vahetusse. **7p**

3. Põhjenduse, et üks ruutvõrrandi lahenditest peab olema 1 või -1, eest 3p
   Võimaluse $x_1 = 1$ mittesobivuse näitamise eest 2p
   Võimaluse $x_1 = -1$ vaatlemise ja õige vastuse eest 2p
   Märkus Põhjenduseta õige võrrandi eest anda 1p. Kui õpilane kirjutab Viète'i teoreemi, kuid ei suuda seda kasutada, siis ainuüksi teoreemi õige teadmise eest panna 1p. **7p**

4. Korrektse abijoonise eest 1p
   Kolmnurga *ANB* võrdhaarsuse näitamise eest 2p
   Kolmnurga *NLC* võrdhaarsuse näitamise eest 3p
   Õige vastuse eest 1p
   Märkus. Lõigu pikkust ei pea tähistama püstkriipsude abil. **7p**

5. Arvutatud, kui mitu arvu jagub 5, 7 ja 9ga korraga, eest 1p
   Arvutatud, kui mitu arvu jagub paaridega 5,7 ; 5,9 ; 7,9, eest 1p
   Arvutatud, kui mitu arvu jagub eraldi 5; 7 ja 9ga, eest 1p
   Lahenduse lõpuleviimise eest 4p
   Märkus Põhjendusteta lahenduse lõpuleviimise eest anda kokku 5p. **7p**
   Et ülesanne sisaldab palju arvutusi, siis ühe või ka kahe arvutusvea eest -1p.